Dans l'algorithme présenté sur la page http://maths.amatheurs.fr/index.php?page=racines, après n étapes, on obtient à la place du diviseur un nombre m ayant n chiffres et à gauche un reste R. Nous allons montrer par récurrence les propriétés :

(P_n) : m est le plus grand nombre dont le carré soit inférieur au nombre s'écrivant $N_1...N_n$

(Q_n) : R est le nombre s'écrivant $N_1...N_n$ auquel on a soustrait m^2

où N_i désigne le i-ème bloc de deux chiffres du nombre N dont on veut extraire la racine carrée ; par exemple si $N = 12345$, $N_1 = 1$, $N_2 = 23$ et $N_3 = 45$.

Initialisation : la première étape de l'algorithme consiste à considérer le premier bloc de deux chiffres de N, c'est-à-dire N_1, puis à prendre le plus grand chiffre m de carré inférieur à N_1 et calculer $R = N_1 - m^2$. Les propriétés (P_1) et (Q_1) sont donc vraies.

Pour l'hérédité, réécrivons d'abord les deux propriétés en termes plus mathématiques.

(P_n) énonce que m est le plus grand nombre de carré inférieur à $100^{n-1}N_1+100^{n-2}N_2+...+100N_{n-1}+N_n = \sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n-j}N_j$, d'où :

$(P_n) : m = \max\left(i : i^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n-j}N_j\right)$

Par le même calcul, $(Q_n) : R = \sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n-j}N_j - m^2$.

Supposons (P_n) et (Q_n). D'après la description de l'algorithme, nous devons montrer (P_{n+1}) et (Q_{n+1}) en remplaçant m par le nombre s'écrivant ma et R par la différence du nombre s'écrivant RN_{n+1} et du produit du nombre s'écrivant Ma par a, où a est le plus grand entier tel que $(Ma) \times a \leqslant RN_{n+1}$ avec $M = 2m$.

En termes plus mathématiques, on pose donc $a = \max(a : (20m + a)\, a \leqslant 100R + N_{n+1})$ et on doit vérifier :

$(*)\ 10m + a = \max\left(i : i^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j\right)$

$(**)\ (100R + N_{n+1}) - ((20m + a)\, a) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j - (10m + a)^2$

D'après (Q_n), $(100R + N_{n+1}) - ((20m + a)\, a) = 100\left(\sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n-j}N_j - m^2\right) + N_{n+1} - (20m + a)\, a = \sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n+1-j}N_j + N_{n+1} - 100m^2 - 20ma - a^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} 100^{n+1-j}N_j + N_{n+1} - \left(100m^2 + 20ma + a^2\right) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j - (10m + a)^2$ donc on a bien $(**)$.

Dès lors, on a $a = \max(a : 100R+N_{n+1}-(20m + a)\, a \geqslant 0) = \max\left(a : \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j - (10m + a)^2 \geqslant 0\right) = \max\left(a : (10m + a)^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j\right)$. Ainsi, $10m+a = 10m+\max\left(a : (10m + a)^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j\right) = \max\left(10m + a : (10m + a)^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j\right) = \max\left(i : i^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n+1} 100^{n+1-j}N_j\right)$ d'où $(*)$.

On a bien l'hérédité, d'où les propriétés (P_n) et (Q_n) pour tout n.

En particulier lorsque l'on a terminé les étapes, on a $N_1...N_n = N$ et (P_n) affirme alors que m est le plus grand nombre dont le carré soit inférieur à N.