Commençons par analyser le problème : en fait $f(a,n!)$, puisqu'on a déjà un produit, est la somme du nombre de facteurs a dans 1, puis dans 2, puis dans 3, ... jusqu'à n. Autrement dit : $f(a,n!) = f(a,1) + f(a,2) + ... + f(a,n)$. Reste à calculer $f(a,i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Or on sait qu'il existe un entier k tel que $a^k \leqslant n < a^{k+1}$. Dès lors, chaque entier i inférieur à n vérifie $f(a,i) \leqslant k$. On va donc compter les i tels que $f(a,i) = k$, puis les i tels que $f(a,i) = k-1$, en continuant jusqu'à $f(a,i) = 1$ et en notant $g(a,j)$ le nombre d'entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $f(a,i) = j$ on obtient :

$f(a,n!) = g(a,1) + 2 \times g(a,2) + 3 \times g(a,3) + ... + k \times g(a,k)$.

Notez que cette formule s'écrit autrement : $f(a,n!) = [g(a,1) + g(a,2) + ... + g(a,k)] + [g(a,2) + ... + g(a,k)] + ... + [g(a,k-1) + g(a,k)] + [g(a,k)]$.

Or $[g(a,j) + g(a,j+1) + ... + g(a,k)]$ est la somme du nombre d'entiers inférieurs à n admettant j facteurs a, du nombre d'entiers inférieurs à n admettant $j+1$ facteurs a, ..., du nombre d'entiers inférieurs à n admettant k facteurs a, c'est-à-dire le nombre d'entiers inférieurs à n admettant au moins j facteurs a, c'est-à-dire encore le nombre de multiples de a^j inférieurs à n !

Donc $f(a,n!) = h(a,1) + h(a,2) + ... + h(a,k)$ où $h(a,j)$ est le nombre de multiples de a^j inférieurs ou égaux à n.

Or on voit aisément que le nombre de multiples de x inférieurs ou égaux à n est le quotient de la division euclidienne de n par x (ça se voit avec un dessin : ces nombres sont espacés de x sur le segment allant de 1 à n, le premier d'entre eux étant x) c'est-à-dire $\left[\frac{n}{x}\right]$ où $[s]$ désigne la partie entière d'un nombre s.

On a donc à présent : $f(a,n!) = \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{a^2}\right] + ... + \left[\frac{n}{a^k}\right]$. On pourrait s'arrêter là, puisqu'on a une jolie formule. Mais on va voir une meilleure méthode qui demande moins de calcul.

Commençons par vérifier que $\left[\frac{n}{a^{k+1}}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{a^k}\right]}{a}\right]$. En effet, $\left[\frac{n}{a^{k+1}}\right]$ est l'entier q tel que $n = qa^{k+1} + r$ avec $0 \leqslant r < a^{k+1}$. Nous devons alors décomposer r : $r = sa^k + t$ avec s entier ($s = \left[\frac{r}{a^k}\right]$ et $0 \leqslant t < a^k$). Alors $n = (qa)a^k + sa^k + t = (qa+s)a^k + t$ d'où on tire que $\left[\frac{n}{a^k}\right] = qa + s$. Si on avait $s \geqslant a$, alors on en tirerait $sa^k \geqslant a^{k+1}$ (car a^k est positif), donc comme $t \geqslant 0$, $r = sa^k + t \geqslant a^{k+1}$ ce qui est faux. On a donc par l'absurd $s < a$. Cependant, s est positif par sa définition. Donc finalement, $0 \leqslant s < a$. Dès lors, $\left[\frac{\left[\frac{n}{a^k}\right]}{a}\right] = \left[\frac{qa+s}{a}\right] = q$. On a bien $\left[\frac{\left[\frac{n}{a^k}\right]}{a}\right] = \left[\frac{n}{a^{k+1}}\right]$.

On en tire donc la méthode pour calculer $f(a,n!)$: on calcule le quotient de n par a, on garde le résultat en mémoire. Puis on prend le nouveau quotient de la division de ce résultat par a et on conserve le nouveau quotient. On redivise, etc... on continue ainsi jusqu'à trouver un quotient de 0 : on a alors calculé $\left[\frac{n}{a^{k+1}}\right]$ et il est temps de s'arrêter. On somme tous les quotients obtenus.

Par exemple, calculons $f(3,600!)$. Le quotient de 600 par 3 vaut $\underline{200}$; le quotient de 200 par 3 vaut $\underline{66}$ (reste 2) ; le quotient de 66 par 3 vaut $\underline{22}$; le quotient de 22 par 3 vaut $\underline{7}$ (reste 1) ; le quotient de 7 par 3 vaut $\underline{2}$ (reste 1) ; le quotient de 2 par 3 vaut $\underline{0}$. Finalement, $f(3,600!) = 200 + 66 + 22 + 7 + 2 = \boxed{297}$.