Le coin des amatheurs - problème n°21 - http://maths.amatheurs.fr
énoncé

a, b et r sont des entiers vérifiant $a = r + b$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue plusieurs tirages de boules successifs selon cette règle :

- si on tire une boule rouge, on la replace dans l'urne
- si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne mais on la remplace par une nouvelle boule rouge

On cherche à calculer la propabilité de l'évènement R_n : "la $n^{\text{ième}}$ boule est rouge".

1) Le but de cette question est de résoudre l'équation (F) : $a.u_{n+1} = (a-1).u_n + r + n$ où $(u_n)_n$ est une suite.

a) Trouver deux réels α et β tels que la suite $w_n = \alpha n + \beta$ vérifie l'équation (F).

b) Soit une suite $(u_n)_n$ vérifiant (F). Trouver une équation vérifiée par la suite $v_n = u_n - w_n$. En déduire l'expression de v_n en fonction de a, n et v_1.

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de a, r, n et u_1.

2) Cacluler les probabilités $p(R_1)$ et $p(R_2)$ des évènements R_1 et R_2.

3) On note B_i le nombre valant 1 si la $i^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n - b \leqslant k \leqslant n$. Exprimer $p(R_{n+1}/S_n = k)$, c'est-à-dire la probabilité que la $(n+1)^{\text{ième}}$ boule soit rouge sachant que S_n vaut k, en fonction de a, k, n et r.

b) Montrer que S_n ne peut prendre que les valeurs entre $n - b$ et n. En déduire $\sum_{k=n-b}^{n} p(S_n = k)$.

c) Déduire des questions a et b l'expression de $p(R_{n+1})$ en fonction de a, $E(S_n)$, n et r.

d) Montrer que $E(S_{n+1}) = E(S_n) + \frac{r+n-E(S_n)}{a}$.

e) Donner une expression de $E(S_n)$, puis de $p(R_n)$,en fonction de n, r et a.

4) a) Etudier les variations de la suite $(p(R_n))_n$.

b) Déterminer la limite de cette suite quand n tend vers $+\infty$. Donner une explication simple.

c) Sauriez-vous trouver une application historique à ce résultat ?