Soit ABC un triangle non dégénéré (les trois sommets ne sont pas alignés). On note H_A (respectivement H_B et H_C) la hauteur issue de A (respectivement B et C).

Par définition des hauteurs, $H_A \perp (BC)$ et $H_B \perp (AC)$. Or (BC) et (AC) ne sont pas parallèles donc H_A et H_B ne sont pas parallèles. Elles se coupent donc en un point H. Il faut alors montrer que H est sur H_C.

$H \in H_A$ donc $(HA) \perp (BC)$, ce qui se traduit avec des produits scalaires par $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$. On en tire avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = 0$, d'où : $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$ ou encore $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

De même, comme $H \in H_B$, on a $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0$ d'où $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$.

Avec les deux égalités précédentes, on trouve $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{CA} = 0$ et avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BA} = 0$ et donc $H \in H_C$.

Les trois hauteurs sont bien concourantes.