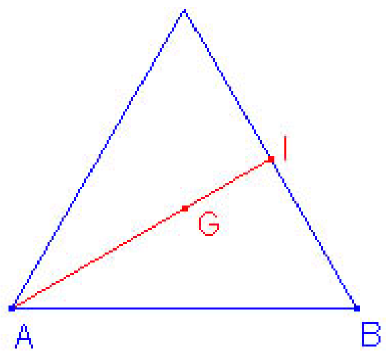
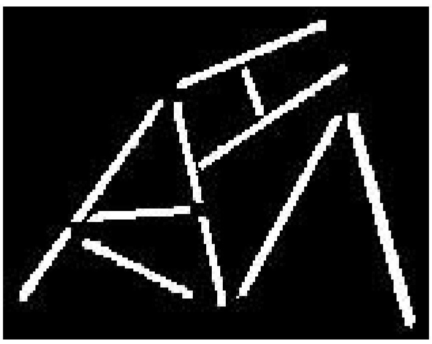
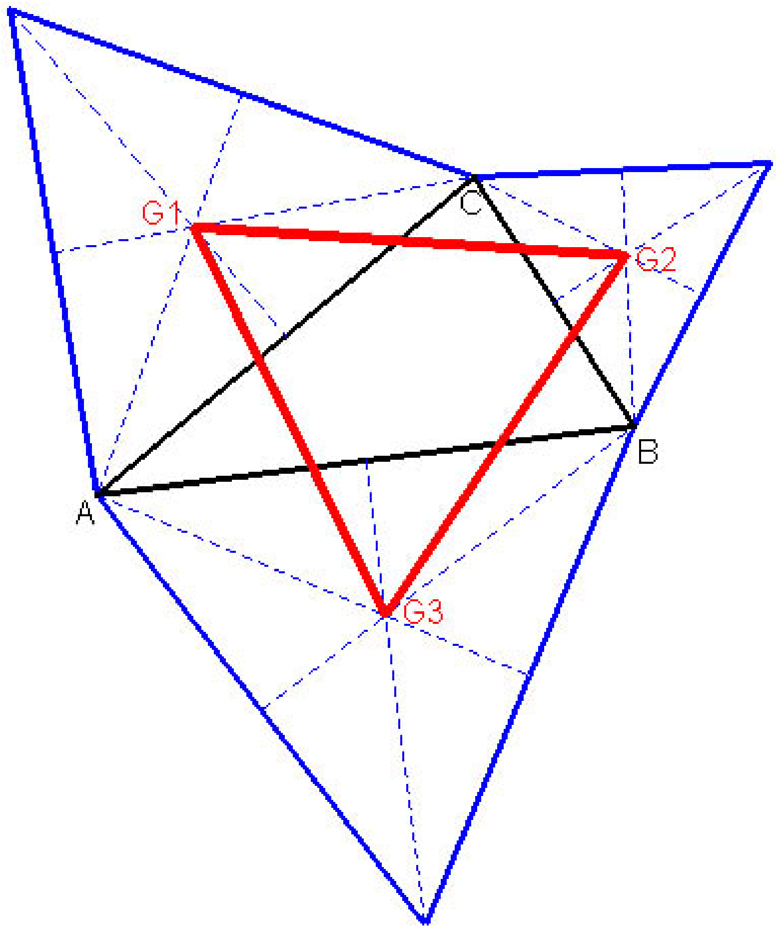


Nous avons d'abord besoin d'une formule donnant l'affixe complexe du centre de gravité d'un triangle équilatéral. Plus précisément, nous avons comme ci-dessus un triangle équilatéral tel qu'en allant dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre) le sommet A vient avant B. On note G le centre de gravité de ce triangle et I le milieu du côté opposé à A. Le but ici est de trouver l'affixe de G en fonction des affixes a et b de A et B.

Comme I est le milieu du côté, (AI) est une médiane du triangle. Mais ce dernier étant équilatéral, (AI) est aussi une hauteur. De plus $BI = \frac{1}{2}AB$ donc en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB rectangle en I, $AI^2 = AB^2 - BI^2 = AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = \frac{3}{4}AB^2$ et donc $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. On sait par les propriétés du centre de gravité que $AG = \frac{2}{3}AI$ (ceci vient du fait que G est l'isobarycentre des trois sommets du triangle, et donc est aussi le barycentre de $\{(A,1),(I,2)\}$) et donc $AG = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{AB}{\sqrt{3}}$. On en tire $\frac{AG}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ soit avec les complexes $\left|\frac{x-a}{b-a}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (on note x l'affixe recherchée de G). De plus, la médiane (AI) dans le triangle équilatéral se trouve être aussi bissectrice de A et l'angle du triangle en A vaut $\frac{\pi}{3}$ et donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ vaut $\frac{\pi}{6}$ à 2π près : un argument de $\frac{x-a}{b-a}$ est $\frac{\pi}{6}$. On obtient alors $\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i$. On obtient finalemet $x = a + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)(b-a)$, soit $\boxed{x = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)a + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)b}$.





Intéressons-nous donc maintenant au théorème de Napoléon. On nomme le triangle de départ (noir) ABC dans le sens direct. Nous choisissons un repère orthonormé du plan tel que l'origine soit en A et B soit d'affixe 1. Ainsi la seule inconnue est l'affixe de C, qu'on note c. On note $G1$, $G2$ et $G3$ les trois centres de gravité comme sur la figure, et g_1, g_2 et g_3 leurs affixes.

Nous allons exprimer les affixes g_1, g_2 et g_3 en fonction de c. en utilisant la formule qu'on a démontrée, en faisant jouer à A le rôle de A et C le rôle de B, on obtient $g_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)c$. De même, on a $g_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)c + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)$ et $g_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)$. On trouve alors $\frac{g_2-g_3}{g_2-g_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)c+\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)c+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)}$.

Or $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i}{-\frac{1}{\sqrt{3}}i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{-i} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)i = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc l'expression se simplifie : $\frac{g_2-g_3}{g_2-g_1} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$. On déduit de cette égalité que $G3$ est l'image de $G1$ par la rotation de centre $G2$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ceci montre que $\boxed{G1G2G3 \text{ est équilatéral}}$.

De plus, on sait que l'affixe du centre de gravité de ce triangle est $\frac{g_1+g_2+g_3}{3}$. Ceci se simplifie très aisément en $\frac{c+1}{3}$. Or $c+1 = 1+0+c$ est la somme des affixes de A, B et C et donc $\frac{g_1+g_2+g_3}{3} = \frac{c+1}{3}$ est l'affixe du centre de gravité de ABC : nous avons montré que ABC et $G1G2G3$ ont le même centre de gravité !