Soit ABC un triangle non dégénéré (les trois sommets ne sont pas alignés). On note A' (respectivement B' et C') le milieu de $[BC]$ (respectivement $[AC]$ et $[AB]$), A'' (respectivement B'' et C'') le pied de la hauteur issue de A (respectivement B et C), H l'orthocentre de ABC, G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.

On introduit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. D'après les propriétés du centre de gravité, $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ donc $A' = h(A)$. Or la droite (AA'') passe par A et les homothéties conservent l'alignement donc **l'image de (AA'') par h passe par A'.**

De plus, par les propriétés des homothéties, l'image par h de (AA'') est parallèle à (AA''). Or (AA'') est la hauteur issue de A donc est perpendiculaire à (BC). Donc l'**image de (AA'') par h est perpendiculaire à (BC).**

D'après les deux informations en gras, l'image par h de (AA'') est la médiatrice de $[BC]$. De même, on démontre que l'image par h de (BB'') est la médiatrice de $[AC]$. De plus, (AA'') et (BB'') étant des hauteurs de ABC, H est l'intersection de (AA'') et (BB''). Donc $h(H)$ est l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec la médiatrice de $[AC]$. D'où $h(H) = O$.

Alors par définition de h, $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ ou $\boxed{\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}}$.

Ainsi, lorsque les trois points ne sont pas confondus (ce qui n'arrive que si ABC est équilatéral), ils sont alignés et le rapport des distances GH et GO est constant !

Remarque : la droite qui aligne ces trois points est nommée droite d'Euler.