



$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{LP}\end{aligned}$$

Soient  $B'$  tel que  $\overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{MB}$ ,  $F'$  tel que  $\overrightarrow{PF'} = \overrightarrow{MF}$  et  $r$  la rotation de centre  $P$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

$\overrightarrow{PL}$  est l'image de  $\overrightarrow{PA}$  par  $r$  et  $\overrightarrow{PF'}$  est l'image de  $\overrightarrow{PB'}$  par  $r$  donc

$$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB'}) = (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PF'}) \text{ ou } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{MF}) \text{ or } \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AM} \text{ donc } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{AM})$$

$$(\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP}) = \pi \quad (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{AM}) = \pi - (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP}) \quad (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = \pi - (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP})$$

$$\cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = \cos[\pi - (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP})] = -\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP})$$

$$PA \cdot MB \cdot \cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = -[PA \cdot MB \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP})]$$

$$\text{Or } PA = LP \text{ et } MB = MA \text{ donc } PA \cdot MB \cdot \cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MB}) = -[LP \cdot MA \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LP})]$$

$$\text{ou } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{LP} \text{ donc } \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \text{ donc } \widehat{PMN} = 90^\circ$$

De même,  $\widehat{MNO} = \widehat{NOP} = \widehat{OPM} = 90^\circ$  donc PMNO est un rectangle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MO} &= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN}) \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PO}) = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PO} \\ &= \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = -MP^2 + MN^2 \\ &= -(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP})^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN})^2 = -MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AP} - AP^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BN} + BN^2\end{aligned}$$

$$\text{Or } AP = BN \text{ et } AM = MB \text{ donc } \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MO} = -2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BN} = 2(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN})$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) &= 2\pi - (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) = 2\pi - [(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})] \\ &= 2\pi - \left[\frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{3\pi}{2} - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \pi \text{ donc } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{2} + [\pi - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})] = \frac{3\pi}{2} - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP})$$

$$\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) \text{ donc } BM \cdot BN \cdot \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = BM \cdot BN \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP})$$

$$\text{or } BM = AM \text{ et } AP = BN \text{ donc } BM \cdot BN \cdot \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}) = AM \cdot AP \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP})$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP} \text{ donc } \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{MO} = 2.0 = 0 \text{ donc } (PN) \perp (MO) \text{ donc } \boxed{PMNO \text{ est un losange}}$$

PMNO est donc un carré