

**Le coin des amateurs - <http://maths.amateurs.fr>  
Démonstration des théorèmes d'Aubel et de Victor Thébault par les complexes**

Soit  $ABCD$  notre quadrilatère de base. On note  $E$  le centre du carré de côté  $AB$ ,  $F$  le centre du carré de côté  $BC$ ,  $G$  le centre du carré de côté  $CD$  et  $H$  le centre du carré de côté  $AD$ . On choisit le repère orthonormé direct tel que  $A$  soit l'origine (d'affixe 0) et  $B$  soit d'affixe 1. On note alors les affixes des autres points par des lettres minuscules.

$E$  a évidemment pour affixe  $\boxed{e = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}$ . Pour déterminer l'affixe de  $F$ , notons qu'il est l'image de  $C$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  composée avec l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (autrement dit, c'est une similitude directe pour ceux qui connaissent). On a donc :  $f - b = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}(c - b) = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})(c - b)$  donc  $f = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})c + (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})b$  soit  $f = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})c + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ . Par la même méthode, on obtient  $g = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})d + (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})c$  et  $h = (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})d$ .

Introduisons  $c = s + it$  et  $d = u + iv$  où  $s, t, u$  et  $v$  sont des réels. On a alors :

$f = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})(s + it) + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \boxed{(\frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}) + i(\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}) = f}$ . De même, on obtient :

$$\boxed{g = (\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{s}{2} - \frac{t}{2}) + i(\frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{t}{2} + \frac{s}{2})} \text{ et } \boxed{h = (\frac{u}{2} - \frac{v}{2}) + i(\frac{u}{2} + \frac{v}{2})}$$

On en tire  $HF^2 = (\frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v}{2})^2 + (\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} - \frac{v}{2})^2$  et  $EG^2 = (\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{s}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{t}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2})^2$

$$HF^2 - EG^2 = \left[ (\frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v}{2})^2 - (\frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{t}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2})^2 \right] + \left[ (\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} - \frac{v}{2})^2 - (\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{s}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2})^2 \right]$$

$HF^2 - EG^2 = 0 + 0 = 0$  donc  $\boxed{HF = EG}$ . De plus, on a le produit scalaire :  $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = (\frac{s}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v}{2}) \cdot (\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{s}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{u}{2} - \frac{v}{2}) \cdot (\frac{v}{2} - \frac{u}{2} + \frac{t}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2})$ . Ne développons pas tout : on voit que ce produit est de la forme  $\alpha \cdot \beta + (-\beta) \cdot \alpha = 0$  donc  $\boxed{(HF) \perp (EG)}$ .

$\boxed{\text{Le théorème d'Aubel est démontré.}}$

Pour le théorème de Thébault,  $ABCD$  est un parallélogramme donc on peut récupérer les calculs précédents avec  $c = d + 1$  soit :

$\boxed{e = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \mid f = (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})d + 1 \mid g = d + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \mid h = (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})d}$ . Le milieu de  $[EG]$  a donc pour affixe  $\frac{e+g}{2} = \frac{d+1}{2}$  et le milieu de  $[HF]$  a pour affixe  $\frac{h+f}{2} = \frac{d+1}{2}$ . Donc les diagonales du quadrilatère  $EFGH$  se coupent en leur milieu. Comme le théorème d'Aubel est toujours valable, elles sont aussi perpendiculaires et de même longueur donc  $EFGH$  est un carré.

$\boxed{\text{Le théorème de Victor Thébault est démontré.}}$

*Remarque : une autre démonstration plus élégante du théorème d'Aubel avec les complexes a été posée au baccalauréat 2005 (exercice pour l'enseignement de spécialité)*