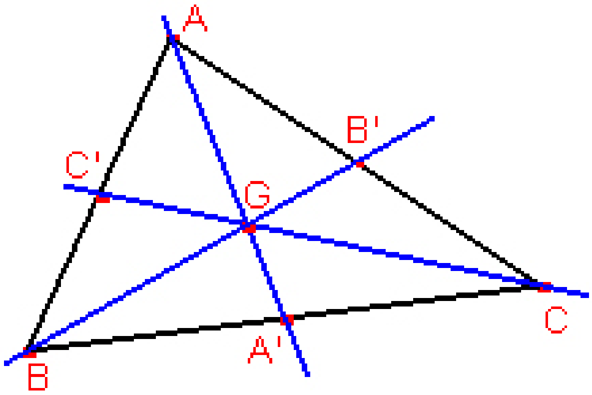

Soit ABC un triangle non dégénéré (les trois sommets ne sont pas alignés). On note A' (respectivement C') le milieu de $[BC]$ (respectivement $[AB]$), G l'intersection des médianes (AA') et (CC'). La droite (BG) coupe (AC) en B'. Il faut montrer que B' est le milieu de $[AC]$.

On introduit le point D symétrique de B par rapport à G. Par construction, G est le milieu de $[BD]$ et A' est le milieu de $[BC]$ donc, en utilisant le théorème des milieux (ou la réciproque du théorème de Thalès) dans le triangle BCD, (GA') et (CD) sont parallèles. Or $A \in (GA')$ donc les droites (GA') et (GA) sont identiques. Alors (GA) et (CD) sont parallèles. De même, en utilisant le théorème des milieux dans le triangle ABD, (GC) et (AD) sont parallèles.

Alors $GADC$ est un parallélogramme. Les diagonales de $GADC$, $[AC]$ et $[GD]$, se coupent donc en leur milieu. Donc B' est le milieu de $[AC]$. **Les trois médianes sont donc bien concourantes**.

Mais on sait de plus que B' est le milieu de $[GD]$ donc $GD = 2.GB'$. Or par construction de G, $GD = GB$ donc $GB = 2.GB'$. Ceci démontre que le centre de gravité est aux deux tiers de chaque médiane (en partant des sommets).