Intégrales de Wallis

Le problème suivant a pour but l'étude des intégrales de Wallis définies pour $n \geqslant 0$ par $W_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$. Les ♠ indiquent les questions plus difficiles.

I) Premiers résultats

1) Calculer W_0 et W_1.

2) Donner un encadrement de sin sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que la suite (W_n) est décroissante. Montrer qu'elle admet une limite l.

3)♠ Montrer avec une intégration par parties (on utilisera $u'(t) = \sin t$) que pour $n \geqslant 2$,
$W_n = (n-1)\left(W_{n-2} - W_n\right) \qquad (1)$

II) Calcul de la limite

1) Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = nW_nW_{n-1}$. Montrer à l'aide de (1) que pour $n \geqslant 2$,
$nW_n = (n-1)W_{n-2} \qquad (2)$

2) En déduire que la suite (I_n) est constante, en déduire la valeur de W_nW_{n-1} pour $n \geqslant 1$

3)♠ Conclure (on utilisera l^2)

III) Calcul de W_n

On pose $A_m = \frac{1\times 3\times \ldots\times(2m-1)}{2\times 4\times \ldots\times(2m)}$ pour $m \geqslant 1$ avec la convention $A_0 = 1$.

Remarque : A_m est le produit des m premiers nombres impairs divisé par le produit des m premiers nombres pairs.

1) Exprimer A_{m+1} en fonction de A_m

2)♠ En déduire l'expression de W_{2m} en fonction de A_m en utilisant (2). On fera un raisonnement par récurrence.

3)♠ Pour calculer W_{2m+1} en fonction de A_m, on pourrait faire une autre récurrence. Utiliser une autre méthode en utilisant le résultat précédent.

4)♠♠ Il reste à calculer A_m. Pour cela, multiplier le numérateur et le dénominateur par le produit $2 \times 4 \times \ldots \times (2m)$. On exprimera A_m à l'aide de factorielles, puis avec un coefficient binômial.

Solution

I) Premiers résultats

1) $W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 t\ dt = \int_0^{\pi/2} 1\ dt = [t]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\ dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = \boxed{1}$

2) On sait que pour tout t dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\boxed{0 \leqslant \sin t \leqslant 1}$. On en déduit que pour tout n, $0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$ (en multipliant l'inégalité par $\sin^n t \geqslant 0$) d'où, en intégrant l'inégalité sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite (W_n) est donc décroissante. Or elle est minorée par 0 donc elle admet une limite l.

3) Pour $n \geqslant 2$, soit $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin^{n-1} t$. Alors $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$. Alors $W_n = \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\ dt$.

$W_n = 0 - \int_0^{\pi/2} -\cos t \times (n-1)\sin^{n-2} t \cos t\ dt = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t\ dt$. Or $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ donc :

$W_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-2} t - \sin^n t\right) dt = (n-1)\left[\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\ dt\right) - \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t\ dt\right)\right] = \boxed{(n-1)\left(W_{n-2} - W_n\right)}$

II) Calcul de la limite

1) On déduit de (1) que pour $n \geqslant 2$, $W_n + (n-1)W_n = (n-1)W_{n-2}$ soit $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}}$

2) Alors, en multipliant par W_{n-1}, pour $n \geqslant 2$, $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$ d'où, pour $n \geqslant 2$, $I_n = I_{n-1}$. $\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est donc constante}}$. De plus, $I_1 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \frac{\pi}{2}$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{W_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2n}}$

3) On a vu que $W_n \to l$. donc $W_{n-1} \to l$ donc $W_nW_{n-1} \to l^2$. Or $\frac{\pi}{2n} \to 0$. Donc $l^2 = 0$ d'où $\boxed{l = 0}$

III) Calcul de W_n

1) $A_{m+1} = \frac{1\times 2\times\ldots\times(2m-1)\times(2m+1)}{2\times 4\times\ldots\times(2m)\times(2m+2)} = \boxed{\frac{2m+1}{2m+2}A_m}$

2) (2) nous montre que $W_{2m} = \frac{2m-1}{2m}W_{2(m-1)} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)}W_{2(m-2)} = \ldots$ On peut donc penser que $W_{2m} = A_m W_0$. En effet, montrons-le par récurrence : c'est vrai pour $m = 0$ car $A_0 = 1$. Si c'est vrai au rang m, alors :

$W_{2(m+1)} = W_{2m+2} = \frac{2m+1}{2m+2}W_{2m}$ d'après (2).

$W_{2(m+1)} = \frac{2m+1}{2m+2}A_m W_0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$W_{2(m+1)} = A_{m+1}W_0$ d'après la question précédente. La propriété est donc héréditaire : elle est vraie pour tout m.

Pour tout m, $W_{2m} = A_m W_0 = \boxed{\frac{\pi}{2}A_m}$

3) D'après la question II.2, on a pour tout m, $2m+1 \geqslant 0$ donc $W_{2m+1} = \frac{\pi}{2(2m+1)} \times \frac{1}{W_{2m}} = \frac{\pi}{2(2m+1)} \times \frac{2}{\pi A_m} = \boxed{\frac{1}{(2m+1)A_m}}$

4) $A_m = \frac{1\times 3\times\ldots\times(2m-1)}{2\times 4\times\ldots\times(2m)} = \frac{1\times 3\times\ldots\times(2m-1)\times 2\times 4\times\ldots\times(2m)}{2\times 4\times\ldots\times(2m)\times 2\times 4\times..\times(2m)} = \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2m)}{[2\times 4\times\ldots\times(2m)]^2}$ en réorganisant le numérateur.

On travaille sur le dénominateur : $A_m = \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2m)}{[(2\times 1)\times(2\times 2)\times\ldots\times(2\times m)]^2} = \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2m)}{[2^m\times 1\times\ldots\times m]^2} = \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2m)}{[2^m\times(m!)]^2} = \boxed{\frac{(2m)!}{2^{2m}\times(m!)^2}}$

On reconnaît un coefficient binômial : $C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{(m!)\times[(2m-m)!]} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$ d'où $\boxed{A_m = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}}$

Remarques

I.2) Attention ! Pour intégrer une inégalité sur un intervalle $[\alpha;\beta]$, il faut que l'inégalité soit valable sur tout l'intervalle, et il faut aussi que $\alpha \leqslant \beta$ (dans le cas contraire, il faut changer le sens de l'inégalité).

Faites aussi attention au fait que la réciproque est fausse : $\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt \leqslant \int_\alpha^\beta g(t)dt\right) \not\Rightarrow (f(t) \leqslant g(t))$

I.3) La formule n'est valable que pour $n \geqslant 2$ à cause de la dérivation de v : pour des valeurs inférieures de n, la dérivation ne marche plus. De plus, la formule finale n'a aucun sens pour des valeurs inférieures (W_{-1} et W_{-2} ne sont pas définis !)

N'oubliez pas que pour utiliser une intégration par parties, les deux fonctions u et v doivent être dérivables sur l'intervalle utilisé.

II.2) Du fait de la restriction $n \geqslant 2$ en I.3, on retrouve la même restriction sur la formule $I_n = I_{n-1}$. Du coup, la suite (I_n) n'est constante qu'à partir de $n = 1$. Mais là aussi, on fait la même remarque : I_0 n'est de toute façon pas défini.

Si vous avez étudié les mathématiques dans le supérieur, vous déduirez de cette formule que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

II.3) Attention ! Le fait que $W_n W_{n-1} \to 0$ n'implique pas que $W_n \to 0$, si l'on n'a pas montré d'abord que W_n a bien une limite !

III) On pourrait synthétiser cette partie ainsi : Si n est pair, $n = 2m$, alors $W_n = \frac{\pi C_{2m}^m}{2^{2m+1}}$, sinon, $n = 2m+1$ et $W_n = \frac{2^{2m}}{(2m+1)C_{2m}^m}$

Si vous aimez les formules barbares, on peut encore synthétiser pour avoir une formule unique :

$$\text{Pour tout } n, \boxed{W_n = \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\frac{2^{n-1}}{nC_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}} + \pi\left(1 + 2\left[\frac{n}{2}\right] - n\right)\frac{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2^{n+1}}}$$