

Soient  $z$  un nombre complexe et  $z' = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ .

$$\text{Si } z \neq 1 \text{ alors } \frac{1-z^5}{1-z} = \frac{1+z-z+z^2-z^2+z^3-z^3+z^4-z^4-z^5}{1-z} = \frac{1(1+z+z^2+z^3+z^4)-z(1+z+z^2+z^3+z^4)}{1-z} = z'$$

$$\text{En appliquant à } z = e^{i2\pi/5}, z' = \frac{1-(e^{i2\pi/5})^5}{1-e^{i2\pi/5}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i2\pi/5}} = \frac{1-1}{1-e^{i2\pi/5}} = 0.$$

On a donc  $1 + e^{i2\pi/5} + e^{i4\pi/5} + e^{i6\pi/5} + e^{i8\pi/5} = 0$ . Soit avec les parties réelles :

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0 \quad (\clubsuit)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\text{Or } \cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 \text{ donc } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2$$

$$\text{De plus } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

En notant  $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  on a donc  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 4x^2 - 2$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -2x$ . Soit en remplaçant dans  $(\clubsuit)$  :  $4x^2 - 2x - 1 = 0$ .

Le discriminant de cette équation vaut  $(-2)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 4 + 16 = 20 > 0$ . On a donc deux solutions :

$$\frac{-(-2)-\sqrt{20}}{2 \times 4} = \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0 \text{ et } \frac{-(-2)+\sqrt{20}}{2 \times 4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} > 0.$$

Cependant,  $\frac{\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$  donc  $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \geq 0$ , d'où finalement  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

$$\text{On a bien } \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}}$$

