Soit l'équation (E) : $x^3 = px + q \iff x^3 - px - q = 0$ où p et q sont réels.

Notons en premier lieu que si l'on peut trouver deux nombres u et v, réels ou complexes conjugués, tels que $u^3 + v^3 = q$ et $uv = \frac{p}{3}$, alors $(u + v)$ est une solution réelle de (E). En effet, on a alors $(u+v)^3 - p(u+v) - q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - p(u+v) - q = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) - q = u^3 + v^3 + (3uv - p)(u+v) - q = q + (3 \times \frac{p}{3} - p)(u+v) - q = 0$. Ce calcul montre que $u+v$ est solution de (E), et $u+v \in \mathbb{R}$ car la somme de deux réels est un réel ainsi que la somme de deux complexes conjugués (égale au double de leur partie réelle).

Remarquons à présent que si deux tels nombres existent, alors on a $u^3 + v^3 = q$ et $u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$, et alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $(X - u^3)(X - v^3) = 0 \iff X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3v^3 = 0 \iff X^2 - qX + \frac{p^3}{27} = 0$. On note (E') cette équation $X^2 - qX + \frac{p^3}{27} = 0$.

Réciproquement, remarquons que (E') est une équation du second degré à coefficients réels. On sait qu'elle admet donc toujours deux racines (éventuellement égales) U et V. On a alors $U + V = q$ et $UV = \frac{p^3}{27} = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Notons u une des trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de U et v_0 une des racines cubiques de V. On sait alors que les racines cubiques de V sont v_0, jv_0 et j^2v_0 où $j = e^{2i\pi/3}$. Les produits de ces racines avec u valent donc uv_0, $j(uv_0)$ ou $j^2(uv_0)$. Or ces trois complexes sont les trois racines cubiques de $UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ donc l'une d'entre elles vaut $\frac{p}{3}$. Nous avons donc trouvé une racine cubique u de U et une racine v de V dont le produit vaut $\frac{p}{3}$. On notera $u = \sqrt[3]{U}$ et $v = \sqrt[3]{V}$ ces choix. Remarquons que si U et V sont réelles, un choix possible pour u (respectivement v) est la "vraie" racine cubique dans $\mathbb{R}$ de U (respectivement V).

En particulier, on obtient $uv \in \mathbb{R}$ donc un argument de uv est 0 ou π. On obtient donc soit $\arg(v) \equiv -\arg(u)[2\pi]$ soit $\arg(v) \equiv \pi - \arg(u)[2\pi]$. Dans le premier cas, on a obtenu que u et v sont conjugués. Dans le second cas, on trouve $\arg(v^3) \equiv 3\arg(v) \equiv 3\pi - 3\arg(u) \equiv \pi - \arg(u^3)[2\pi]$ donc $\arg(UV) \equiv \arg(U) + \arg(V) \equiv \arg(u^3) + \arg(v^3) \equiv \pi[2\pi]$ et donc $\frac{p^3}{27} = UV \in \mathbb{R}^-$. Ainsi dans ce cas, $\frac{p^3}{27} \leqslant 0$, ce qui prouve que l'équation du second degré à coefficients réels (E') a un discriminant positif, et donc que ses racines U et V sont réelles. On tire de la remarque qui clot le paragraphe précédent que u et v sont des réels. Ce paragraphe se résume donc ainsi : u et v sont réels ou complexes conjugués. Or on a déjà montré que $uv = \frac{p}{3}$ et on a $u^3 + v^3 = U + V = q$. u et v vérifient donc les conditions du premier paragraphe.

Nous avons finalement démontré le fonctionnement de l'algorithme suivant :

- On trouve les deux solutions U et V de l'équation (E') : $X^2 - qX + \frac{p^3}{27} = 0$.
- Si U et V sont réels, on pose u et v leurs racines cubiques dans $\mathbb{R}$, sinon on choisit u et v des racines de U et V dans $\mathbb{C}$ telles que $uv = \frac{p}{3}$.
- $u + v$ est alors une solution réelle de l'équation (E) : $x^3 = px + q$.

Pour avoir la formule de Tartaglia-Cardan, il nous reste donc à expliciter la résolution de (E') : cette équation a pour discriminant $\Delta = q^2 - \frac{4p^3}{27}$. On trouve donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2 - \frac{4p^3}{27}}{4}} = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$X_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Une solution réelle de (E) est $\boxed{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$