Remarque : les calculs qui suivent utilisent abondamment le fait que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Soit $u$ une suite de Fibonacci, c'est-à-dire une suite définie par la donnée de $u_0$, $u_1$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On obtient alors le produit matriciel $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, qu'on peut écrire $U_{n+1} = AU_n$ où $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc par récurrence : $U_n = A^n U_0$.
Le polynôme caractéristique de $A$ est $X^2 - X - 1$ et admet donc deux racines distinctes : $\varphi$ et $1 - \varphi$.
Les vecteurs propres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $\varphi$ vérifient $(1 - \varphi)x + y = 0$ donc $y = (\varphi - 1)x$.
Les vecteurs propres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associés à $1 - \varphi$ vérifient $\varphi x + y = 0$ donc $y = -\varphi x$.
Posons donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi - 1 & -\varphi \end{pmatrix}$. On montre que $P^{-1} = \frac{1}{2\varphi - 1} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ \varphi - 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On a donc diagonalisé $A$ : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 - \varphi \end{pmatrix}$.
Nous en déduisons par récurrence $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2\varphi - 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi - 1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (1 - \varphi)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 1 \\ \varphi - 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Après développement, $A^n = \frac{1}{2\varphi - 1} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - (1 - \varphi)^{n+1} & \varphi^n - (1 - \varphi)^n \\ \varphi^{n+1}(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^{n+1} & \varphi^n(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^n \end{pmatrix}$.
On obtient alors : $U_n = \frac{1}{2\varphi - 1} \begin{pmatrix} \left[\varphi^{n+1} - (1 - \varphi)^{n+1}\right] u_1 + \left[\varphi^n - (1 - \varphi)^n\right] u_0 \\ \left[\varphi^{n+1}(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^{n+1}\right] u_1 + \left[\varphi^n(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^n\right] u_0 \end{pmatrix}$.
Dès lors, $u_n = \frac{1}{2\varphi - 1} \left\{ \left[\varphi^{n+1}(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^{n+1}\right] u_1 + \left[\varphi^n(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)^n\right] u_0 \right\}$.
On réécrit $u_n = \frac{\varphi^n}{2\varphi - 1} \left\{ \left[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi) \left(\frac{1 - \varphi}{\varphi}\right)^n\right] u_1 + \left[(\varphi - 1) + \varphi(\frac{1 - \varphi}{\varphi})^n\right] u_0 \right\}$.
Or $\frac{1 - \varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} - 1 = \varphi - 1 - 1 = \varphi - 2$ d'où $u_n = \frac{\varphi^n}{2\varphi - 1} \left\{ \left[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)(\varphi - 2)^n\right] u_1 + \left[(\varphi - 1) + \varphi(\varphi - 2)^n\right] u_0 \right\}$.
On en tire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi \frac{\left[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)(\varphi - 2)^{n+1}\right] u_1 + \left[(\varphi - 1) + \varphi(\varphi - 2)^{n+1}\right] u_0}{\left[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi)(\varphi - 2)^n\right] u_1 + \left[(\varphi - 1) + \varphi(\varphi - 2)^n\right] u_0}$.
Mais $\varphi - 2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \in \left]-1; 0\right]$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\varphi - 2)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\varphi - 2)^{n+1} = 0$.
On en tire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi \frac{[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi) \times 0] u_1 + [(\varphi - 1) + \varphi \times 0] u_0}{[\varphi(\varphi - 1) + \varphi(1 - \varphi) \times 0] u_1 + [(\varphi - 1) + \varphi \times 0] u_0} = \varphi \frac{\varphi(\varphi - 1) u_1 + (\varphi - 1) u_0}{\varphi(\varphi - 1) u_1 + (\varphi - 1) u_0} = \varphi$.

Nous avons donc bien que dans toute suite de Fibonacci, les quotients successifs tendent vers le nombre d'or.